第六节　薛定谔方程与一维无限深势阱

1. 已知粒子在一维矩形无限深势阱中运动，其波函数为：$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{a}}\cos\frac{3\pi x}{2a}$ $(-a<x<a)$，那么粒子在$x=5a/6$处出现的概率密度为：

解析：量子力学中，粒子在一位置出现的概率密度为：

$$|\psi(x)|^2=\left|\frac{1}{\sqrt{a}}\cos\frac{3\pi x}{2a}\right|^2=\frac{1}{a}\left|\cos\left(\frac{3\pi}{2a}\times\frac{5a}{6}\right)\right|^2=\frac{1}{2a}$$

故选A

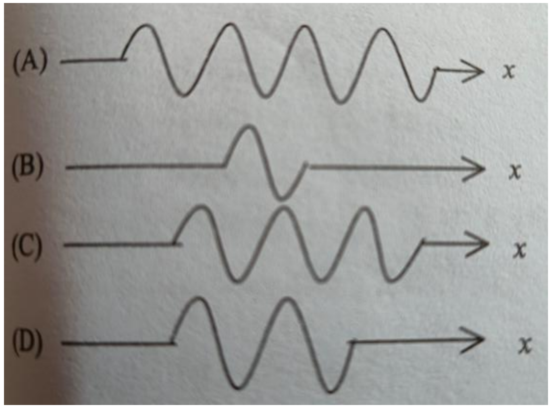
2. 将波函数在空间各点的振幅同时增大D倍，则粒子在空间的分布概率将：

解析：量子力学中，波函数是**归一化的**，当波函数在空间个点振幅同时增大D倍，不同位置处的**相对振幅没有发生改变**，即粒子分布的概率不变。

故选D

3. 微观粒子的德布罗意波是一种：概率波（参考课本P363页：德布罗意波的统计解释-德布罗意波是概率波），故选C

4. 设粒子运动的波函数图线分别如图A、B、C、D所示，那么其中确定粒子动量的精确度最高的波函数是哪个图？



解析：由不确定关系：$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h$，则 $\Delta p_x \sim h/\Delta x$，

可知，Δx与Δp_x成反比，Δx越大，Δp_x越小

从图中可知，A的Δx最大，则对应的Δp_x 最小，

所以其精确度最高，故选A

5. 决定微观粒子空间分布状态的函数称为：波函数，该函数可由薛定谔方程来确定。

6. 设描述微观粒子运动的波函数为$\psi(\vec{r}, t)$，则$\psi\psi^*$表示t 时刻、粒子出现在r处的概率密度。

7. 波函数的归一化条件是指波函数的平方(概率密度)对全空间积分等于1。

$$\boxed{\int |\Psi|^2 \mathrm{d}V = 1}$$

8. 粒子在一维无限深势阱中运动，其波函数为：$\psi(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{3\pi x}{a}.$ $(0<x<a)$ 粒子出现的概率最大的各个位置是x=

解析：量子力学中，粒子在一位置出现的概率密度为：

$$w=\left|\psi(x)\right|^2=\left|\sqrt{\frac{2}{a}}\right|^2=\frac{2}{a}\sin^2\frac{3\pi x}{a}=\frac{1}{a}\left(1-\cos\frac{6\pi x}{a}\right)$$

则要求概率最大，且$0<x<a$，即

要求：$\frac{dw}{dx}=0;\quad \frac{d^2w}{dx^2}<0$

可得：$\sin\frac{6\pi x}{a}=0;\quad \cos\frac{6\pi x}{a}<0$

即：$\frac{6\pi x}{a}=(2k+1)\pi \Rightarrow x=(2k+1)\frac{a}{6}\quad k=0,1,2$

由此可得：$x=\frac{a}{6}$，$x=\frac{a}{2}$，$x=\frac{5a}{6}$

9. 设有一电子在宽为0.2 nm的一维无限深的方势阱中，(1)计算电子在最低能级的能量？(2)当电子处于第一激发态(n=2)时，在势阱何处出现的概率密度最大，其值为多少？(3)求在(0,0.1 nm)的范围内电子出现的概率。

解析：如图所示，遇到一维无线深势阱的题目，第一步写出不同能级n下的波函数：$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\quad n=1,2,3,\ldots$，和对应的能量：$E_n=n^2\frac{h^2}{8ma^2}$

根据题意可知：$a=0.2$ nm，带入n=1，h=6.63*10^{-34} Js，m=9.11*10^{-31} kg

可得（1）最低能量为：$E_1=\frac{h^2}{8ma^2}=1.51\times10^{-18}J=9.44eV$

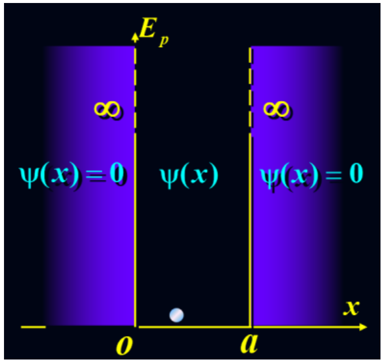
（2）当n=2时，电子波函数为：$\psi_2(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{2\pi x}{a}$

概率密度为：

$$w=\left|\psi_2(x)\right|^2=\frac{2}{a}\sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right)=\frac{1}{a}\left(1-\cos\frac{4\pi x}{a}\right)$$

则在0<x<a内，概率最大，要求：

$$\frac{dw}{dx}=0;\quad \frac{d^2w}{dx^2}<0\quad\Rightarrow\quad\frac{4\pi x}{a}=(2k+1)\pi\quad k=0,1$$



通过求解可得，此时x的位置为：$x=\frac{a}{4}=0.05nm\quad x=\frac{3a}{4}=0.15nm$

相应的概率密度为：2/a=10^{10} m^{-1}

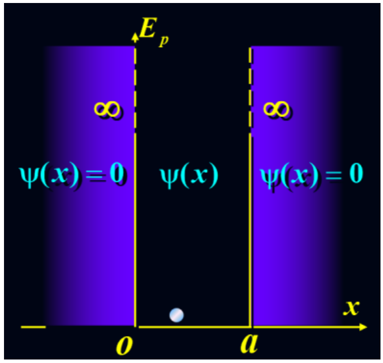
9. 设有一电子在宽为0.2 nm的一维无限深的方势阱中，(1)计算电子在最低能级的能量？(2)当电子处于第一激发态(n=2)时，在势阱何处出现的概率密度最大，其值为多少？(3)求在(0,0.1 nm)的范围内电子出现的概率。

解析：（3）利用电子处于n能级的波函数可得，对应的概率密度为：

$$w_n = |\psi_n(x)|^2 = \frac{2}{a}\sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \frac{1}{a}\left(1-\cos\frac{2n\pi x}{a}\right) \qquad n = 1, 2, 3\ldots$$

通过对概率密度积分可得，在(0, a/2)范围内出现的概率为：

$$P = \int_0^{a/2} w_n dx = \frac{1}{a}\int_0^{a/2}\left(1-\cos\frac{2n\pi x}{a}\right)dx = \frac{1}{a}\left[\frac{a}{2} - \frac{a}{2n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{a}\times\frac{a}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}$$



10. 思考题：在一维无限深方势阱中，如增加或减小阱的宽度，其能级将如何变化？

解析：量子力学中，对于一维无限深势阱，设宽度为a，则其能量为：

$$E_n = n^2 \frac{h^2}{8ma^2}$$

可以发现不同能级的能量会随着宽度的增加（或减小）而**减小（或增大）**。